CONCOURS 1991

Régime Général

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

EXERCICE I

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$\forall i = 1,2,\ldots,n \qquad f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

1°-a) Ecrire la matrice M de f dans la base B.

b) Exprimer M^2 en fonction de M et n.

c) Exprimer dans la base B les vecteurs suivants :

$f(e_1+e_2+\ldots\ldots+e_n)$ et pour $i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1$, $f(e_i-e_n)$.

Déduire de b) que f possède au plus deux valeurs propres o et n ;
Déterminer les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres; donner une base pour chacun d'eux.

2°- On note id l'application identique dans $\mathbb{R}^n$; on donne $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et on pose :

$g = af + bid$.

Déduire de la question précédente les valeurs propres et les espaces propres de g.

3°- On pose $T = aM + bI$, I étant la matrice de l'application id.
Pour tout entier k calculer T^k en fonction de M, k, a, b (on pourra utiliser la formule du binôme de newton).

****

EXERCICE II

On considère l'expérience suivante : deux personnes écrivent chacune au hasard un nombre de deux chiffres.
On note X et Y chacun de ces deux nombres.

1°- Calculer les probabilités des événements suivants :

$(X = Y)$; $(X < Y)$

2°-On répète 300 fois cette expérience ; quelle est la probabilité pour qu'au moins une fois les deux personnes écrivent le même nombre.

3°-On répète n fois cette expérience ; déterminer n pour que la probabilité qu'au moins une fois les deux personnes écrivent le même numéro soit supérieure à 0,99.

****

PROBLEME

Soit g la fonction réelle définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1°- Montrer que g est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

2°- a) Montrer, par récurrence sur n , que la dérivée n^{ieme} de g existe sur $[0 , 1[$ et s'écrit :

$$g^{(n)}(x) = g(x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré 2n , vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) = x^2 [P'_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)]$$

b) Calculer $\lim_{x\to 1} g^{(n)}(x)$.

En déduire que g est indéfiniment dérivable sur $[0 , +\infty [$.

3°- Pour tout x réel on pose : $f(x) = g(x^2)$, et $A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

a) Préciser l'expression de f .

b) Montrer que l'intégrale A existe et est égale à : $\int_{-1}^{1} e^{\frac{-1}{1-t^2}}\, dt$.

Calculer par la méthode des rectangles une valeur approchée par excès de $\int_0^1 e^{\frac{-1}{1-t^2}}\, dt$ (on partagera l'intervalle [0,1] en cinq parties égales).

En déduire une valeur approchée par excès de A .

4°- Pour tout entier n et tout réel x on pose : $f_n(x) = \frac{n}{A} f(nx)$.

a) Exprimer $f_n(x)$ avec la fonction exponentielle .

b) Montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1$

c) Etudier la fonction $x \longrightarrow f_2(x)$ et faire sa représentation graphique .(on prendra ici A = 0,45)

5°- On suppose que f_n est la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle T_n .

a) Démontrer que l'espérance de T_n est nulle .

b) Pour tout x réel déterminer $\lim_{n\to+\infty} p(T_n \leq x)$.(On distinguera les cas $x < 0$, $x > 0$ et $x = 0$) .

FIN

****